

TD6 Index – Arbre B+

Notations et conventions

Nombre de valeurs dans un nœuds. Pour un arbre B+ d'ordre d , le nombre de valeurs qu'un nœud peut contenir est :

dans l'intervalle $[1, 2.d]$ pour la racine,

dans l'intervalle $[d, 2.d]$ pour les nœuds intermédiaires et les feuilles.

Certains exercices n'indiquent pas l'ordre de l'arbre mais directement le nombre de valeurs dans un nœud.

Dessin d'un arbre. Pour repérer facilement les nœuds d'un arbre quand on le dessine, on peut attribuer un nom à chaque nœud : R pour la racine, N_i pour les nœuds intermédiaires et F_i pour les feuilles. On peut utiliser la syntaxe suivante pour représenter le contenu d'un nœud : $N(v_1, v_2, \dots)$ où N est le nom du nœud et les v_i sont les valeurs.

Insertion d'une valeur en cas de débordement : quand la feuille F déborde, on garde les $d+1$ plus petites valeurs dans F , les d autres valeurs vont dans une nouvelle feuille. Quand le nœud intermédiaire N déborde on garde les d plus petites valeurs dans N , les d plus grandes valeurs vont dans un nouveau nœud. La valeur restante est insérée dans le nœud père.

Suppression d'une valeur. Si le nœud ne contient que d valeurs avant la suppression, alors on considère d'abord la redistribution avec le nœud voisin (de même père) situé à gauche, puis avec celui situé à droite. Si aucune redistribution n'est possible, on considère la fusion avec le voisin (de même père) situé à gauche, puis avec celui situé à droite. Une suppression avec redistribution nécessite d'ajuster le contenu du nœud père. Une suppression avec fusion nécessite de supprimer une valeur dans le nœud père.

Décompte du nombre de nœuds lus et écrits. Une opération d'insertion ou de suppression peut nécessiter de lire, modifier ou créer des nœuds. On appelle L le nombre de nœuds lus pendant une opération, et respectivement E le nombre de nœuds écrits ou créés.

Exercice 1 : Insertions successives

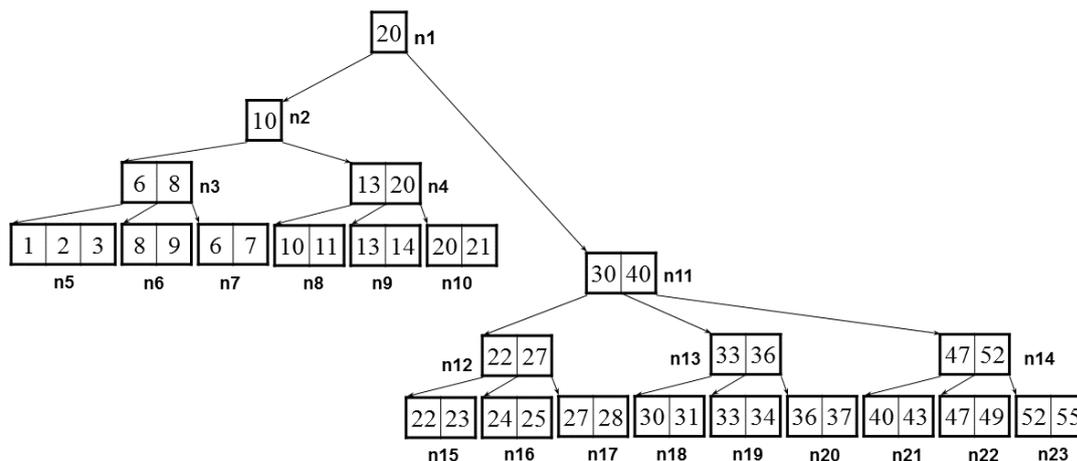
Dans cet exercice, les arbres sont d'ordre 1 (i.e., il y a 1 ou 2 valeurs par nœud).

1) Soit l'arbre A_0 composé d'une racine $N_1(10)$, et de deux feuilles $F_1(5)$ et $F_2(20)$. A_0 a 2 niveaux. On insère successivement dans A_0 les nombres entiers 8 puis 30 puis 15. On obtient A_1 . Dessiner A_1 .

2) On insère dans A_1 le nombre 10. On obtient A_2 . Dessiner A_2 .

Exercice 2 : Chercher l'erreur

On considère l'arbre B+ d'ordre 2 suivant :



1) Cet arbre est-il équilibré ? Pourquoi ?

2) Trouver les erreurs dans cet arbre. Indiquer quel nœud n_i est erroné et expliquer brièvement l'erreur. S'il est possible de corriger l'erreur sans restructurer l'arbre, mais en modifiant seulement des valeurs de clés, alors suggérer une correction.

Exercice 3 : Insertion, suppression, perte d'un niveau

On considère un arbre B+ d'ordre $d=2$. La racine de l'arbre **A1** contient la valeur 50. Un seul niveau intermédiaire contient (tous nœuds confondus) les valeurs 8, 18, 32, 40, 73, 85. Les feuilles contiennent (toutes feuilles confondues) les valeurs 1, 2, 5, 6, 8, 10, 18, 27, 32, 39, 41, 45, 52, 58, 73, 80, 91, 99.

- 1) Dessinez l'arbre A1.
- 2) Dessiner l'arbre A2 après l'insertion de la valeur 9 dans A1. Combien valent L et E ?
- 3) Dessiner l'arbre A3 après l'insertion de la valeur 3 dans A1. Combien valent L et E ?
- 4) a) Dessiner l'arbre A4 après suppression de la valeur 8 dans A1. Si nécessaire, on envisage une redistribution à gauche. Combien valent L et E ?
b) Même question mais en considérant uniquement la redistribution à droite si possible, sinon fusionner 2 feuilles.
- 5) Montrer l'état de l'arbre résultant, à partir de l'arbre A1, de l'insertion de la clé 46 suivie de la suppression de la clé 52
- 6) Montrer l'état de l'arbre résultant, à partir de l'arbre A1, de la suppression successive des clés 32, 39, 41, 45 et 73.

Exercice 4 : Effet d'une séquence insertion-suppression

On étudie l'effet de l'insertion d'une valeur v suivie de la suppression immédiate de v . Cela ne modifie pas l'ensemble des valeurs indexées. Mais est-ce que cela modifie la structure de l'arbre ? Pour répondre à cette question, on considère un arbre B+ d'ordre 2, nommé A1. La racine de A1 contient les clés 13, 17, 24, 30. Ses feuilles contiennent (toutes feuilles confondues) les valeurs 2, 3, 5, 7, 14, 16, 19, 20, 22, 24, 27, 29, 33, 34, 38, 39.

- 1) Dessiner A1.
- 2) Donner 4 valeurs de clé telles que leur insertion successive puis leur suppression dans l'ordre inverse résulte dans un état identique à l'état initial
- 3) Donner une valeur de clé dont l'insertion suivie de la suppression résulte dans un état différent de l'état initial.
- 4) Montrer l'état de l'arbre résultant, à partir de l'arbre A1, de l'insertion de la clé 30.